1165. 或ル函數方程式ニ就イテ

（Zwirner ノ定理ノ別證明）

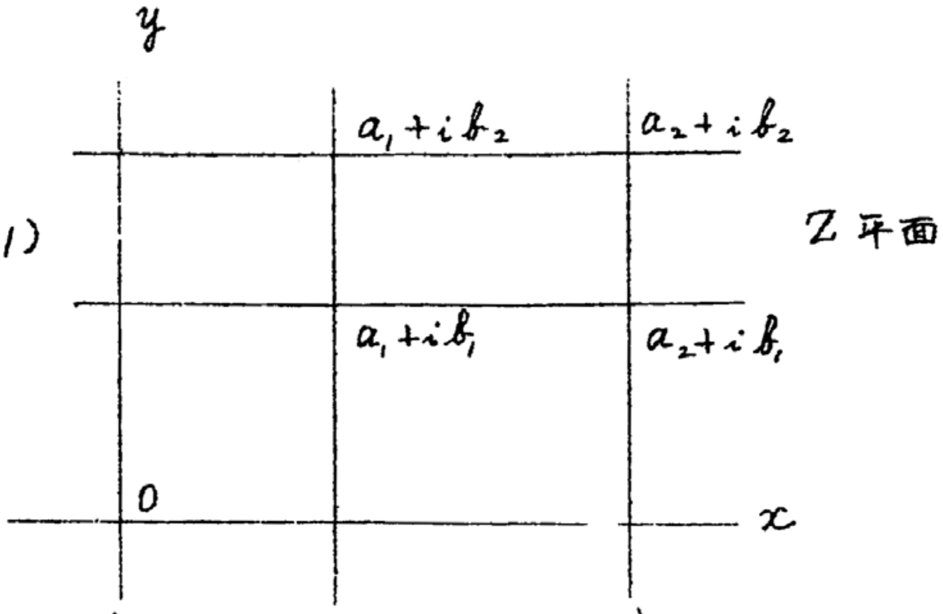
北村　泰一（東北帝大理學部）

春木　博（神戸高等商船）

坐標幾何學ニ次ノ問題ガアル。（Ivory ノ定理）

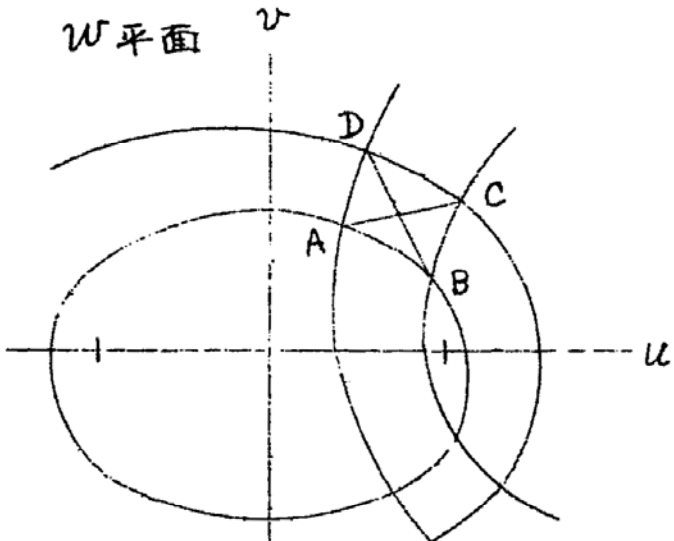
共焦ナル二系ノ二次曲線群 Γ_1, Γ_2 アルトキ Γ_1 ノ任意ノ二ツト Γ_2 ノ任意ノ二ツノ作ル四ツノ交点ニ對シ、斜（ハスカケ）ノ對角線ノ長サハ相等シ。

(*fig.*1)



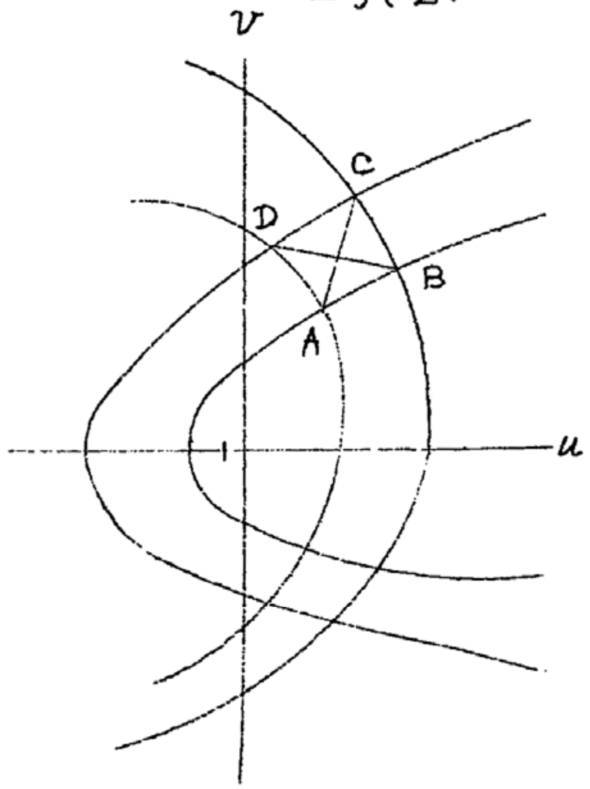
$w=\sin Z$
$=f(Z)$

$w=Z^2$
$=f(Z)$



(*fig.* 2)

$\overline{AC}=\overline{BD}$



(*fig.* 3)

$\overline{AC}=\overline{BD}$

之ヲ等角寫像ノ問題トシテ次ノ如ク解ケル。

前者(*fig.*2)デアレバ

$$|\sin(a_1+b_1 i)-\sin(a_2+b_2 i)|$$
$$=2\left|\cos\frac{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}{2}\right|\left|\sin\frac{(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i}{2}\right|$$
$$|\sin(a_1-b_2 i)-\sin(a_2+b_1 i)|$$
$$=2\left|\cos\frac{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}{2}\right|\left|\sin\frac{(a_1-a_2)-(b_1-b_2)i}{2}\right|$$

トナリ，両式ノ右辺ハ相等シクナルカラ $\overline{AC}=\overline{BD}$ トナル。

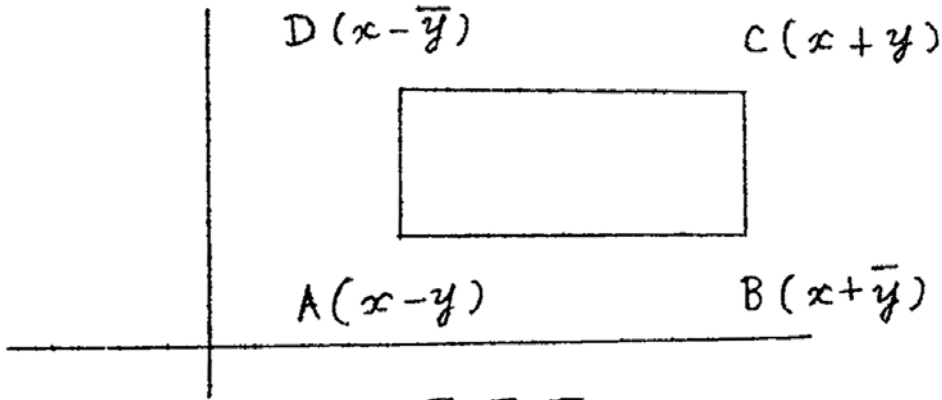
後者（$fig.3$）ノトキモ大体同様デアル。

ソコデ逆ニ f ヲ未知函数（解析函数トスル）ト考ヘタトキ（f ヲ解析函数トスレバ上ノ Ivory ノ性質ヲ有スル二群ノ曲線網ヲ求メヨト云フコトニナル）

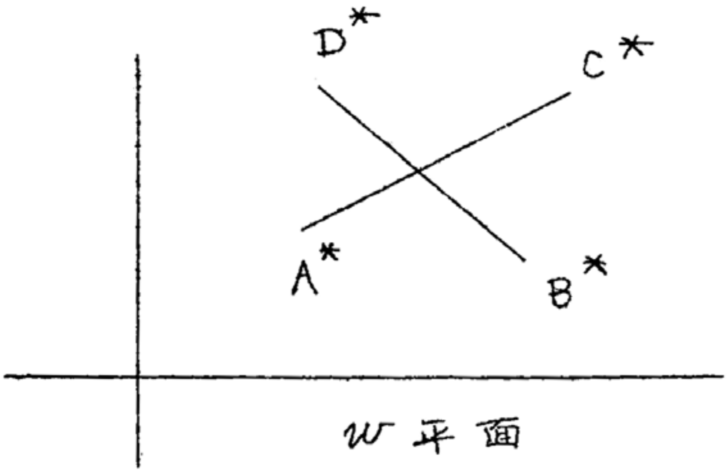
$$|f(x+iy)-f(x'+iy')|=|f(x+iy')-f(x'+iy)|$$

ノ解ハドウナルカト云フコトヲ問題ニスル。

但シ x, y, x', y' ハ實數ヲアラハス。之ハ次ノヤウニ解ケル。



Z 平面



w 平面

$(\overline{A^*C^*} = \overline{B^*D^*})$

文字ヲ書キカヘテ上ノ函数方程式ヲ書キ直スト

$$|f(x+y)-f(x-y)| = |f(x+\bar{y})-f(x-\bar{y})|$$

トナル。茲ニ x, y ハ任意ノ複素数ヲアラハシ, $\bar{y}$ ハ y ノ共軛複素数トスル。

$$(1) \quad |f(x+y)-f(x-y)| = |f(x+\bar{y})-f(x-\bar{y})|$$

$\varphi(x, y) = f(x+y) - f(x-y)$ トオキ, 之ヲ y ノ巾級数ニ展開スルトキ $\varphi(x, 0) = 0$ ナル故

$$(2) \quad \varphi(x, y) = A_k(x) y^k + A_{k+1} y^{k+1} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + A_n(x) y^n + \cdots\cdots \quad (k \geqq 1)$$

ト書ケル。茲ニ $A_k(x) \neq 0$ トスル。

(1) ヨリ $|\varphi(x, y)| = |\varphi(x, \bar{y})|$

之レヲ書キ直セバ

$$\varphi(x, y)\overline{\varphi(x, y)} = \varphi(x, \bar{y})\overline{\varphi(x, \bar{y})}$$

上式へ (2) ヲ代入シテ, y 及ビ $\bar{y}$ ノ巾ノ相当項ノ係数ヲ相等シトオクコトニヨリ

$$A_k(x)\overline{A_l(x)} = \overline{A_k(x)} A_l(x)$$
$$(l = k+1, k+2, \cdots\cdots)$$

$A_k(x) \neq 0$ ナル故、或ル領域ニ於テ

$$\frac{A_l(x)}{A_k(x)} = \overline{\frac{\overline{A_l(x)}}{\overline{A_k(x)}}}$$

ガ成リ立ツ。故ニ正則函數 $\frac{A_l(x)}{A_k(x)}$ ハ或ル領域ニ於テ常ニ實數値ヲ取ル故

$$A_l(x) = \alpha_l A_k(x) \ (l = k+1,\ k+2, \cdots\cdots)$$

ガ數平面上ニ於テ恒等的ニ成リ立ツ。但シ α_l ハ實常數デアル。

故ニ(2)ヨリ $\varphi(x, y) = A_k(x)\left[y^k + \alpha_{k+1} y^{k+1} + \alpha_{k+2} y^{k+2} + \cdots\cdots\right]$

ヲ得ル。茲ニ $\alpha_l \ (l = k+1,\ k+2, \cdots\cdots)$ ハ實常數デアル。

コヽデ $A_k(x) = 2p(x)$,

$$y^k + \alpha_{k+1} y^{k+1} + \alpha_{k+2} y^{k+2} + \cdots\cdots = q(y)$$

ト改メテ書ケバ

$$\varphi(x, y) = 2p(x)\, q(y)$$

故ニ

(3) $\quad f(x+y) - f(x-y) = 2p(x)\, q(y)$

茲ニ $q(y)$ ハ實係數ノ巾級數ニ展開サレ. $y^k \ (k \geqq 1)$ ヨリ始マル整函數デアリ、從ッテ勿論 $q(0) = 0$ デアル。

$p(x) \neq 0$, ($P(x) = 0$ ナラバ $f(x)$ ハ恒等的ニ常數)ナル故

(3)ヨリ $\quad q(y) = \frac{1}{2p(x)}\left[f(x+y) - f(x-y)\right]$

故ニ　$g(y_1+y_2)+g(y_1-y_2)$

$$=\frac{1}{2p(x)}\Big\{f(x+y_1+y_2)-f(x-y_1-y_2)$$

$$+f(x+y_1-y_2)-f(x-y_1+y_2)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2p(x)}\Big\{\big[f(x+y_1+y_2)-f(x-y_1+y_2)\big]$$

$$+\big[f(x+y_1-y_2)-f(x-y_1-y_2)\big]\Big\}$$

$$=\frac{1}{2p(x)}\Big\{2p(x+y_2)\,g(y_1)+2p(x-y_2)\,g(y_1)\Big\}$$

$$=\frac{p(x+y_2)+p(x-y_2)}{p(x)}\,g(y_1)$$

故ニ、文字ヲ改メテ書ケバ

$$(4)\qquad g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y)$$

コヽニ，$g(y)$ ハ y ノミノ函数デアル。上ニ於テ

$$\frac{1}{2}\,\frac{p(x+y_2)+p(x-y_2)}{p(x)}=\text{アタル。}$$

(4) ハ有名ナ函数方程式デ，之ハ (4) ヲ得タト同様ナ方法デ解クト（前ニ書イタヤウニ $g(0)=0$，$g(x)=x^{k}+\alpha_{k+1}x^{k+1}+\cdots\cdots$ ノ展開ノ係数ハスベテ實數ナルコトニ注意シテ）

結局 $g(x)=x$ 又ハ $g(x)=\sin x$，

又ハ $g(x)=\sin h x$

トナル。次ニ，コノ三ツノ場合ヲ分ケテ $f(x)$ ヲ求メル。

$\boxed{\text{第一ノ場合}}$　$g(x)=x$ ナルトキ

コノトキハ (3) ヨリ

$$f(x+y)-f(x-y)=2p(x)y$$

之ヲ(4)ヲ得タトキト同ジ様ナ方法デ解ケバ

結局 $f(x)=ax^2+bx+c$ (茲ニ a, b, c ハ複素常數)

$\boxed{\text{第二ノ場合}}$ $q(x)=\sin x$ ナルトキ

コノトキハ (3) ヨリ

$$f(x+y)-f(x-y)=2p(x)\sin y$$

之ヲ(4)ヲ得タトキト同ジ様ナ方法デ解ケバ

結局 $f(x)=a\sin\alpha x+b\cos\alpha x+c$

(茲ニ a, b, c ハ複素常數, α ハ實常數)

$\boxed{\text{第三ノ場合}}$ $q(x)=\sin h x$ ナルトキ

コノトキハ同様ニシテ

$$f(x)=a\sin h\alpha x+b\cos h\alpha x+c$$

(茲ニ a, b, c ハ複素常數, α ハ實常數)

結局求ムル解ハ次ノ三ツナルコトヲ知ル。

$$\begin{cases} f(x)=ax^2+bx+c \\ f(x)=a\sin\alpha x+b\cos\alpha x+c \\ f(x)=a\sin h\alpha x+b\cos h\alpha x+c \end{cases}$$

茲ニ a, b, c ハ複素常數ニシテ、α ハ實常數

Ivory ノ性質ヲ有スル直交曲線族ガ共焦有心二次曲線及ビ共焦抛物線族ニ限ルコトハ

Kurt Zwirner: Orthogonalsystem in denen Ivorys Theorem gilt: Abhand aus dem Hamburgischen Mathematischen Seminar 5 (1926-27) 313 — 336頁

ニ証明シタアルガ上記ノ証明ハ之ノ別証明トナル。

——— (完) ———